Investitionsrechnung

Ein paar Gedanken zur Kapitalwertmethode

von
Frank Alexander Natter

Sept/2004

1 Einleitung

Symbol	Beschreibung
$e_i = E_i - A_i$	Einzahlung/Auszahlung in Periode i, also vor Ablauf Periode $i \in [t_{i-1}, t_i]$
K_i	"Kontostand" zum Zeitpunkt t_i also am Ende bzw.
	direkt nach Ablauf on Periode i
i_s, i_h	Soll bzw. Habenszins für Kapital-Aufnahme bzw. -reinvestition.
	Im allg. ist$i_s > i_h$. Aber im idealen Kapitalmarkt gilt
	für dessen Zins i_k somit $i_k = i_s = i_h$
$z = 1 + i$	Häufig verwendete Abkürzung
KW_0	mit i_k diskontierter Kapitalwert

Tabelle 1: Legende der benutzen mathematischen Symbole

Zinsen für Periode i werden zum Zeitpunkt t_i fällig und betreffen den Kontostand zum Zeitpunkt t_{i-1}. Es wird davon ausgegangen, daSS Einzahlungen e_i während oder eher am Ende von Periode i statt finden und daSS diese somit nicht mehr in der laufenden Periode, sondern in der nächsten Periode t_{i+1}, verzinst werden. Realistischer wäre es vielleicht diese zur Hälfte bzw. anteilig zu verzinsen.
e_1 ist also die effektive Einzahlung gegen Ende von Periode 1 und

$$e_0 = E_0 - A_0 = -A_0 \tag{1}$$

entspricht der Anfangsinvestition.

2 Vermögensendwert

Die folgende Formel geht davon aus, daSS für die Anfangsinvestition Sollzinsen in Höhe der aktuellen Schuld, welche sich jedoch durch die Einzahlungen e_i pro Periode veringert, pro Periode zu leisten ist. Aus obigen Annahmen lässt sich sehr einfach, weswegen hier auf die Herleitung verzichtet wird [1], folgender Kontostand nach j Perioden ableiten:

$$K_j = \sum_{\mu=0}^{j} z_s^{j-\mu} e_\mu \tag{2}$$

Diese Reihe ist gültig fpr n Perioden, nämlich solange $K_j < 0$. Wenn K_j positiv wird, wobei dieser Zeitpunkt als break even bezeichnet werden kann, dann ist die Kapitalschuld nicht mehr mit z_s zu verzinsen, sondern die Einzahlungen lassen sich auf dem Kaptialmarkt zu den sogenannten Habenszinsen reinvestieren.
n ist somit wie folgt definiert:

$$K_{n-1} < 0 \qquad \text{und} \qquad K_n > 0 \tag{3}$$

[1]bei Interesse bitte bei Autor melden...

Nun, nach n Perioden, ist das Anfangskapital mit seinen Kapitalkosten verdient. Ab jetzt wird m Perioden mit z_h verzinst. Dabei ist m über die Investitionslaufzeit $N = n + m$ definiert:

$$K_{n,m} = K_n z_H^m + \sum_{\nu=1}^{m} z_h^{m-\nu} e_{n+\nu} \tag{4}$$

Die Bestimmung von n muß in der Regel numerisch erfolgen; für eine uniforme Einzahlungsreihe $e_\mu = e_p$, also mit konstantem e_p pro Periode, läßt sich jedoch, mit Hilfe der wohlbekannten Polynomsumme, n angeben:

$$\frac{e_0}{e_p} = \sum_{\mu=1}^{n} z^{-\mu} = \frac{1 - z^{-n}}{z - 1} \tag{5}$$

$$\text{aus} \quad P_n = \sum_{\mu=1}^{n} x^{\mu} = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1} \tag{6}$$

$$\text{also} \quad n = -\ln\left(1 - \frac{ie_0}{e_p}\right) \Big/ \ln(1 + i) \tag{7}$$

Z.B. ergibt sich bei $e_0 = 100$ kEUR und $e_p = 20$ kEUR und $i = 0.1$ eine Laufzeit von $n = 7.3$ Perioden. Die statische Rechnung, d.h. $i = 0$, würde $n = 5$ Perioden liefern.

3 Vergleich mit Kapitalwert

Der Vermögensendwert $K_{n,m}$ wird auf den Zeitpunkt t_0 zurück gerechnet zum Vergleich mit einer Alternativinvestition, welche mit I_h verzinst werden könnte, also: $K_{n,m}^0 = z_h^{-n-m} K_{n,m}$ Dies Größe sollte zum Vergleich verschiedener Investitionen herangezogen werden, da sie realistischer als der Kapitalwert KW_0 ist, welche nämlich von $i_s = i_h$. Diese Annahme wird in Gln.4 eingesetzt, wobei der Kapitalmarktzins i_k durch $z = 1 + i_k$ eingeht:

$$\begin{aligned} K_{n,m}^0 &= z_h^{-n-m} K_{n,m} && (8)\\ &= K_n z^{-n} + \sum_{\nu=1}^{m} z^{-(n+\nu)} e_{n+\nu} && (9)\\ &= \sum_{\mu=0}^{n} z_s^{n-\mu} e_\mu z^n + \sum_{\mu=n+1}^{m+n} z^{-\mu} e_\mu && (10)\\ &= \sum_{\mu=0}^{m+n} z^{-\mu} e_\mu = \mathrm{KW}_0 && (11) \end{aligned}$$

Somit ist bewiesen, daß KW_0 ein Spezialfall von Gln.4 darstellt und zwar für die unrealistische Annahme von $i_s = i_h$. Da im allgemeinen $i_s > i_h$ gewichtet die Kapitalwertmethode Einkünfte ab t_n zu niedrig und diskontiert die Kapitalkosten bis zum break even zu wenig, da man in einem realistischen Kapitalmarkt davon ausgehen kann daSS i_k zwischen Soll- und Habenszins liegt.

4 Zinsfuß

Im Folgende soll eine Näherung skizziert werden, die als Startwert für ein Newton oder besser noch Runge-Kutta Verfahren dient, um mit möglichst schneller Konvergenz den Zinsfuß zu berechnen: Als Zinsfuß wird der kleinste nicht-negative Nulldurchgang des Kapitalwertes — natürlich nur wenn dieser positiv ist — in Abhängigkeit des Kapitalmarktzinses verstanden. Eine Taylorentwicklung bis einschließlich 3.ter Ordnung, welche mit einem Fehler von $O(i^4)$ behaftet ist, liefert für $K_{n,0}$:

$$K_{n,0} = \sum_{\mu=0}^{n} z^{-\mu} e_\mu \tag{12}$$

$$\approx \sum_{\mu=0}^{n} e_\mu - i\mu e_\mu + i^2 \frac{1}{2}(\mu^2 + \mu) e_\mu + i^3 \frac{1}{6}(\mu^3 + 3\mu^2 + 2\mu) e_\mu \tag{13}$$

$$= E_{=} - iE_1 + \frac{i^2}{2}(E_1 + E_2) - \frac{i^3}{6}(E_3 + 3E_2 + 2E_1) \tag{14}$$

Dabei wurde zur Abkürzung $E_q = \sum_{\mu=0}^{n} \mu^q e_\mu$ eingeführt, welche sich numerisch trivial in einer Schleife berechnen lassen. Die kleinste positive Nullstelle von Gln.14 läßt sich effizient und leicht berechenen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird nun auf 2.te Ordnung beschränkt, damit sich eine quadratische Lösung für den Zinsfuß r ergibt:

$$\text{aus} \quad 0 = E_0 - E_1 r + \frac{1}{2}(E_1 + E_2) r^2 \tag{15}$$

$$\text{folgt} \quad r = \frac{E_1 + \sqrt{E_1^2 - 2E_0(E_1 + E_2}}{E_1 + E_2} \tag{16}$$

5 Fazit

Je nach Zahlungsreihe führt jedoch ein Vergleich verschiedener Investitionsalternativen mit der Zinsfußmethode auf andere Präferenzen als die Kapitalwertmethode. Jedoch auch diese geht von gewissen, m.E. unrealistischen Annahmen aus, die nicht immer so gegeben sind. Desswegen ist die diskontierte Vermögensendwertmethode von Kapitel 2, siehe Gln.4, aufgrund ihrer realistischen, wenn auch aufwändigeren, Berechnung vorzuziehen.